Title: 8166b244-1fc3-11f1-8376-ecb1d7916074

۱. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=6$ و تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ خط $y=3x+2$ را قطع کند، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f^2(1)}{x^2+3x-4}$ چگونه عددی است؟

۱) مربع کامل ۲) اول ۳) مکعب کامل ٤) حاصل ضرب دو عدد متوالی

۱. گزینه‌ی (٤) صحیح است. ابتدا حاصل حد داده شده را به کمک هوپیتال ساده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)+f'(1-h)}{2}=\frac{2f'(1)}{2}=f'(1)$$

بنابراین $f'(1)=6$ است. همچنین تابع در نقطه‌ای به طول ۱ خط $y=3x+2$ را قطع کرده، پس تابع از $A(1,5)$ می‌گذرد، در نتیجه $f(1)=5$.

حال داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f^2(1)}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{f(x)+f(1)}{x+4}=f'(1)\times\frac{2f(1)}{5}=6\times\frac{2}{5}\times 5=12$$

حاصل‌ضرب دو عدد متوالی

Title: b212838c-1fc3-11f1-a11e-ecb1d7916074

۳. خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(۱,۲)$ و $B(-۱,۳)$ بر منحنی پیوسته‌ی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=۳$ مماس است. حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f^{۲}(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}$ کدام است؟

۱) ۲ ‏ ‏ ‏ ۲) ۳ ‏ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ‏ ۴) ۵

۳. گزینه‌ی (۲) صحیح است. معادله‌ی خط گذرنده از $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ بصورت $y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ است. پس $f(۳)=-\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱$ و $f'(۳)=-\frac{۱}{۲}$ است. حال باید هوپیتال بگیریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^{۲}(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}\xrightarrow{hop}\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)f'(x)+۴f'(x)}{-۱}=-\left(۲f(۳)f'(۳)+۴f'(۳)\right)$$

$$=-\left(۲(۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)=۳$$

Title: d6ba2d5c-1fc3-11f1-a11e-ecb1d7916074

٤. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & ;x\le -۲\\ -\frac{۱}{۲}x^{۲}+bx+c & ;x>-۲\end{cases}$ در $x=-۲$ مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ٤) $\frac{۲}{۳}$

٤. گزینه‌ی (۳) صحیح است. اول باید پیوستگی را بررسی کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=\sqrt{۵+۴}=۳=f(-۲)\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-۲-۲b+c\end{cases}\Rightarrow -۲-۲b+c=۳$$

تا اینجا داریم: $۲b-c=-۵$. حال باید $f'_+(-۲)=f'_-(-۲)$ یعنی :

$$\left(\frac{-۲}{۲\sqrt{۵-۲x}}\right)_{x=-۲}=(-x+b)_{x=-۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۳}=b+۲\Rightarrow b=-\frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲b-c=-۵\Rightarrow -\frac{۱۴}{۳}-c=-۵\Rightarrow c=\frac{۱}{۳}$$

Title: f98c353c-1fc3-11f1-a11e-ecb1d7916074

۵. اگر $f(x)=\begin{cases} ax^2+2b & ;x>k \\ bx+a & ;x\le k \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۴　　　۲) ۴-　　　۳) ۲　　　۴) ۲-

۵. گزینه‌ی (۱) صحیح است. تابع روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در نقطه‌ی مرزی k نیز باید پیوسته و مشتق‌پذیر باشد:

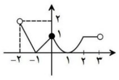
$$1)\ x=k \quad \begin{cases} \text{م چ}: b \\ \text{م ر}: 2ax \end{cases} \Rightarrow b=2ak \Rightarrow \frac{b}{a}=2k$$

$$2)\ x=k \quad \begin{cases} \text{ح چ}: bk+a \\ \text{ح ر}: ak^2+2b \end{cases} \Rightarrow bk+a=ak^2+2b$$

حال طرفین تساوی به دست آمده را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$\left(\frac{b}{a}\right)k+1=k^2+2\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow (2k)(k)+1=k^2+2(2k) \Rightarrow k^2-4k+1=0 \Rightarrow k_1+k_2=4$$

Title: 084478fa-1fc4-11f1-a11e-ecb1d7916074

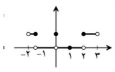


۶. شکل مقابل مربوط به تابع $y=f(x+1)+2$ است، تابع $y=[f(x)]$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۵ ۴) ۴

۶. گزینه‌ی (۱) صحیح است. می‌توانیم با یک واحد انتقال به سمت راست، دو واحد انتقال به سمت پایین به نمودار $y=f(x)$ برسیم ولی چون اعداد ۱ و ۲ هر دو صحیح هستند، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر [همان نقاطی که درون براکت عدد صحیح می‌شوند] تابع $y=f(x)$ با تابع $y=f(x+1)+2$ یکسان است، پس کافیست تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر $y=[f(x+1)+2]$ را پیدا کنیم [به شکل روبرو نگاه کنید] تابع در نقاطی به طول‌های ۲، صفر و ۱/۵- مشتق‌ناپذیر است.



Title: 181670a8-1fc4-11f1-a11e-ecb1d7916074

۷. زاویه‌ی بین دو نیم مماس چپ و راست رسم شده بر تابع $f(x)=\sqrt{x^{۳}+۳x^{۲}}$ در نقطه‌ی گوشه‌ای آن کدام است؟

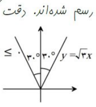
۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۱۲۰° ٤) ۹۰°

۷. گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$f(x)=\sqrt{x^{۳}+۳x^{۲}}=\sqrt{x^{۲}(x+۳)}=|x|\sqrt{x+۳}$$

$$\xrightarrow{x=\text{۰ گوشه‌ای}}\begin{cases} f'_{+}(۰)=۱\times\sqrt{۳}=\sqrt{۳} \xrightarrow[\text{معادله نیم مماس راست}]{T(۰,۰)} y=\sqrt{۳}x \quad ,x\geq ۰ \\ f'_{-}(۰)=(-۱)\times\sqrt{۳}=-\sqrt{۳} \xrightarrow[\text{معادله نیم مماس چپ}]{} y=-\sqrt{۳}x \quad ,x< ۰ \end{cases}$$

به شکل نگاه کنید که نیم‌مماس راست‌های $x\geq ۰$, $y=\sqrt{۳}x$ و نیم‌مماس چپ $x<۰$, $y=-\sqrt{۳}x$ رسم شده‌اند. دقت کنید می‌دانیم



$\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$ است پس زاویه‌ی خط $y=\sqrt{۳}x$ با افق (محور xها) ۶۰° و با محور yها، ۳۰° است و برای خط $y=-\sqrt{۳}x$ زاویه با سمت مثبت محور xها، ۱۲۰° و زاویه با سمت منفی محور xها، ۶۰° است. با توجه به شکل مشخص است که زاویه‌ی بین دو نیم مماس، $۲\times ۳۰^\circ=۶۰^\circ$ می‌باشد.

Title: 24fbe56e-1fc4-11f1-a11e-ecb1d7916074

۸. اگر $f(x)=\left|۲|x|-۱\right|$، حاصل $f'_{+}(۰)+۲f'_{-}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳f'_{+}\left(-\frac{۱}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۸　　۳) -۱۲　　۴) ۴

۸. گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\begin{cases} x=۰^{+} \Rightarrow f(x)=۱-۲x \Rightarrow f'(x)=-۲ \\ x=\frac{۱}{۲}^{-} \Rightarrow f(x)=۱-۲x \Rightarrow f'(x)=-۲ \Rightarrow f'_{+}(۰)+۲f'_{-}\left(\frac{۱}{۲}\right)+۳f'_{+}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-۲-۴+۶=۰ \\ x=-\frac{۱}{۲}^{+} \Rightarrow f(x)=۲x+۱ \Rightarrow f'(x)=۲ \end{cases}$$

Title: 3623e882-1fc4-11f1-a11e-ecb1d7916074

۹. خطی عمود بر منحنی $y=x^{۲}-۲$ در نقطه‌ی برخورد آن با نیمساز ناحیه‌ی سوم و در آن ناحیه، از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

۱) $(۰,۰)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(۳,۱)$ ٤) $(۳,-۱)$

۹. گزینه‌ی (۳) صحیح است. منظور همان خط قائم بر نمودار است. ابتدا مختصات نقطه‌ی پای عمود را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{تابع}: y=x^{۲}-۲ \\ \text{نیمساز ناحیه سوم} \ \ y=x \ \ ,(x\,,y<۰) \end{cases} \xrightarrow[\text{برخورد آنها}]{f=g} x^{۲}-۲=x \Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \ \checkmark \\ x=۲ \ \times \end{cases}$$

$x=۲$ غیرقابل‌قبول است چون باید $x<۰$ باشد (ناحیه‌ی سوم). با جایگذاری $x=-۱$ در یکی از معادلات $y=x$ یا $y=x^{۲}-۲$، مقدار $y=-۱$ به دست می‌آید. پس مختصات نقطه‌ی مورد نظر (پای عمود)، $H\,(-۱,-۱)$ است.

$$\text{شیب خط مماس}\ m_T=y'=۲x \xrightarrow{x=-۱} m_T=-۲ \xrightarrow[\text{شیب خط قائم}]{\text{معکوس و قرینه‌ی}} m_H=\frac{۱}{۲}$$

$$\text{معادله‌ی خط قائم بر نمودار}\ y-y_{۰}=m\,(x-x_{۰}) \Rightarrow y+۱=\frac{۱}{۲}(x+۱) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$$

این که خط عمود بر نمودار از کدام نقطه می‌گذرد، فقط با امتحان کردن، گزینه‌ها در خط $y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$ مشخص می‌شود، که گزینه‌ی (۳) یعنی نقطه‌ی $(۳,۱)$ درست است:

$$y=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}=۱$$

Title: 46e27d64-1fc4-11f1-a11e-ecb1d7916074

۱۰. دو خط مماس قائم بر منحنی $y = ۳x - \sqrt[۳]{x^۲ + x - ۲}$ قابل رسم است. فاصله‌ی این دو خط کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۱   ۳) ۳   ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

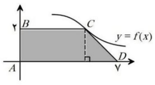
۱۰. گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$y = ۳x - \sqrt[۳]{x^۲ + x - ۲} \xrightarrow{y' = \infty} x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow A(۱,۳) \\ x = -۲ \Rightarrow y = -۶ \Rightarrow B(-۲,-۶) \end{cases}$$

دقت کنید اگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی مدنظر باشد منظور $AB = \sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲}$ است. اما فاصله‌ی دو خط مماس قائم مدنظر است یعنی فاصله‌ی دو خط $x = ۱$ و $x = -۲$ از یکدیگر را می‌خواهد که برابر $d = |x_۲ - x_۱| = ۱ - (-۲) = ۳$ است.

Title: 9967826a-1fc3-11f1-b2ea-ecb1d7916074

۲. منحنی $y = f(x)$ مطابق شکل در رأس C بر ضلع CD از ذوزنقه $ABCD$ به مساحت ۱۲ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x \to ۵} \frac{f(x) - ۲}{x - ۵}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۱-

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $-\sqrt{۳}$

۲. گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$S = \frac{۱}{۲}(BC + AD) \times AB = ۱۲ = \frac{۱}{۲}(BC + ۷) \times ۲ \Rightarrow BC = ۵ \Rightarrow C(۵,۲),\ D(۷,۰)$$

حال شیب خط گذرا از نقاط C و D را می‌توان پیدا کرد:

$$m_{CD} = \frac{۲ - ۰}{۵ - ۷} = -۱$$

از طرفی چون $C(۵,۲)$ روی $y = f(x)$ قرار دارد $f(۵) = ۲$ است و حاصل حد داده شده صفر، صفرام است، پس هوپیتال می‌گیریم و داریم:

$$\lim_{x \to ۵} \frac{f(x) - ۲}{x - ۵} = f'(۵)$$

یعنی باید شیب خط مماس بر تابع $y = f(x)$ در $x = ۵$ را پیدا کنیم که برابر با ۱- است.