

Title: 8166b244-1fc3-11f1-8376-ecb1d7916074

اگر $f'(1) = 6$ و تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ خط $y = 3x + 2$ را قطع کند، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x^2 + 3x - 4}$ چقدره

عددی است؟

(۴) حاصل ضرب دو عدد متوالی

(۳) مکعب کامل

(۲) اول

(۱) مربع کامل

گزینه‌ی (۴) صحیح است. ابتدا حاصل عد داده شده را به کمک هسپیتال ساده می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(1+h) + f''(1-h)}{2} = \frac{f''(1)}{2} = f''(1)$$

بنابراین $f'(1) = 6$ است. همچنین تابع در نقطه‌ای به طول ۱ خط $y = 3x + 2$ را قطع کرده پس تابع از $A(1, 5)$ می‌گذرد. در نتیجه $f'(1) = 6$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x-1} \times \frac{f'(x) + f'(1)}{x+4} = f''(1) \times \frac{f'(1)}{5} = 6 \times \frac{6}{5} = \frac{36}{5} = 7.2$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی

Title: b212838c-1fc3-11f1-a11e-ecb1d7916074

۳. خط گذرنده از دو نقطه $A(1,2)$ و $B(-1,3)$ بر منحنی پیوسته $y=f(x)$ در نقطه $x=3$ مماس است. حاصل هر

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x) + \varphi f(x) - 5}{3-x}$$

کدام است؟

۵ (ع)

۴ (ب)

۳ (د)

۲ (ا)

۳. گزینه‌ی (د) صحیح است. معادله‌ی خط گذرنده از $(-1,3)$ و $(1,2)$ به صورت $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ است. پس $f^{-1}(3) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0$ و $f'(3) = -\frac{1}{2}$ است. حال باید هسپیتال بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x) + \varphi f(x) - 5}{3-x} \stackrel{hop}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x) f'(x) + \varphi f'(x)}{-1} = -(f^{-1}(3) f'(3) + \varphi f'(3))$$
$$= -\left(0 \left(-\frac{1}{2}\right) + \varphi \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 3$$

۴. تابع با شرایطی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{3}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۱)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \sqrt{5+4} = 3 = f(-2) \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -2 - 2b + c \end{cases} \Rightarrow -2 - 2b + c = 3$$

۴. گزینه‌ی (۳) صحیح است. اول باید پیوستگی را بررسی کنیم؛

تا اینجا داریم: $b - c = -5$ حال باید $f'_+(-2) = f'_-(-2)$ یعنی:

$$\left(\frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} \right)_{x=-2} = (-x + b)_{x=-2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = b + 2 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2b - c = -5 \Rightarrow -\frac{5}{2} - c = -5 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

۵. اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \nu b & ; x > k \\ bx + a & ; x \leq k \end{cases}$ روی \mathbb{R} مشتق‌پذیر باشد، مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

-۲ (۴) ۲ (۳) -۴ (۲) ۴ (۱)

۵. گزینه‌ی (۱) صحیح است. تابع روی \mathbb{R} مشتق‌پذیر است، پس در نقطه‌ی مرزی k نیز باید پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

$$1) x = k \begin{cases} \text{از چپ: } b \\ \text{از راست: } \nu ax \end{cases} \Rightarrow b = \nu ak \Rightarrow \frac{b}{a} = \nu k$$

$$2) x = k \begin{cases} \text{از چپ: } bk + a \\ \text{از راست: } ak^2 + \nu b \end{cases} \Rightarrow bk + a = ak^2 + \nu b$$

حال طرفین تساوی به دست آمده را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$\left(\frac{b}{a}\right)k + 1 = k^2 + \nu \left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow (\nu k)(k) + 1 = k^2 + \nu(2k) \Rightarrow k^2 - 4k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = 4$$

Title: 181670a8-1fc4-11f1-a11e-ecb1d7916074

۷. زاویه‌ی بین دو نیم مماس چپ و راست رسم شده بر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطه‌ی گوشه‌ای آن کرام است؟
 ۹۰° (۴) ۱۲۰° (۳) ۶۰° (۲) ۳۰° (۱)

۷. گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x^2(x+3)} = |x| \sqrt{x+3}$$

$$\xrightarrow{\text{گوشه‌ای } x} \begin{cases} f'_+(0) = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} & \xrightarrow{\text{مقارنه نیم مماس راست}} y = \sqrt{3}x, x \geq 0 \\ f'_-(0) = (-1) \times \sqrt{3} = -\sqrt{3} & \xrightarrow{\text{مقارنه نیم مماس چپ}} y = -\sqrt{3}x, x < 0 \end{cases}$$

به شکل نگاه کنید که نیم‌مماس راست‌های $x \geq 0$, $y = \sqrt{3}x$ و نیم‌مماس چپ $x < 0$, $y = -\sqrt{3}x$ رسم شده‌اند. دقت کنید می‌دانیم $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ است پس زاویه‌ی خط $y = \sqrt{3}x$ با افق (معمولاً) 60° و با محور y ها، 30° است و برای خط $y = -\sqrt{3}x$ زاویه با سمت مثبت محور x ها، 120° و زاویه با سمت منفی محور x ها، 60° است. با توجه به شکل مشخص است که زاویه‌ی بین دو نیم مماس، $60^\circ = 2 \times 30^\circ$ می‌باشد.



۴ (ع) -۱۲ (س) ۸ (پ) صفر (ا)

۱. اگر $f(x) = |x| - 1$ حاصل $f'_+(-\frac{1}{4}) + f'_-(\frac{1}{4}) + f'_+(-\frac{1}{4})$ را بیابید. (۱ صفر)

۱. گزینه‌ی (ا) صحیح است.

$$\begin{cases} x = 0^+ \Rightarrow f(x) = 1 - 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \\ x = \frac{1}{4}^- \Rightarrow f(x) = 1 - 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \Rightarrow f'_+(-\frac{1}{4}) + f'_-(\frac{1}{4}) + f'_+(-\frac{1}{4}) = -2 - 2 + 2 = -2 \\ x = -\frac{1}{4}^+ \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \end{cases}$$

Title: 3623e882-1fc4-11f1-a11e-ecb1d7916074

۹. خطی عمود بر منحنی $y = x^2 - 2$ در نقطه‌ی برش خود آن با نیمساز ناحیه‌ی سوم و در آن ناحیه، از گرام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۰،۰) (۱) (-۱،۱) (۲) (۳،۱) (۳) (۳،-۱) (۴)

۹. گزینه‌ی (۳) صحیح است. منظر همان خط قائم بر نمودار است. ابتدا مقدمات نقطه‌ی پای عمود را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$\frac{f=g}{\text{برش خود آنها}}$

$x = 2$ غیر قابل قبول است چون باید $x < 0$ باشد (ناحیه‌ی سوم). با جایگزینی $x = -1$ در یکی از معادلات $y = x$ یا $y = x^2 - 2$ مقدار $y = -1$ به دست می‌آید. پس مقدمات نقطه‌ی مورد نظر (پای عمود)، $H(-1, -1)$ است.

$$m_T = 2x \xrightarrow{x=-1} m_T = -2 \xrightarrow{\text{مماس و قریبی}} m_H = \frac{1}{2}$$

$$m_T = -2 \xrightarrow{\text{شیب خط قائم}} m_H = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

این که خط عمود بر نمودار از گرام نقطه می‌گذرد، فقط با امتحان کردن، گزینه‌ها در خط $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ مشخص می‌شود، که گزینه‌ی (۳) یعنی نقطه‌ی

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad (3, 1) \text{ درست است؛}$$

۱۰. دو خط مماس قائم بر منحنی $y = 3x - \sqrt{x^2 + x - 2}$ قابل رسم است. فاصله‌ی این دو خط کرام است؟

۹ () ۱ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴)

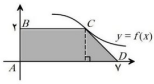
۱۱. گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$y = 3x - \sqrt{x^2 + x - 2} \xrightarrow{y' = 0} x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(1, 3) \\ x = -2 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow B(-2, -6) \end{cases}$$

دقت کنید اگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی مرتکز باشد منقوس $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ است. اما فاصله‌ی دو خط مماس قائم مرتکز است یعنی فاصله‌ی دو خط $x = 1$ و $x = -2$ از یکدیگر را می‌نواهد که برابر $d = |x_1 - x_2| = 1 - (-2) = 3$ است.

Title: 9967826a-1fc3-11f1-b2ea-ecb1d7916074

۲. منحنی $y = f(x)$ مطابق شکل در رأس C بر ضلع CD از زونته $ABCD$ به مساحت ۱۲ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2}{x - 5}$ کدام است؟



- (۲) -1
- (۱) 1
- (۳) $\sqrt{3}$
- (۴) $-\sqrt{3}$

۲. گزینه‌ی (۲) صحیح است. $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \times AB = 12 \Rightarrow \frac{1}{2}(BC + 5) \times 2 \Rightarrow BC = 5 \Rightarrow C(5, 2), D(5, 0)$

حال شیب خط گذرا از نقاط C و D را می‌توان پیدا کرد: $m_{CD} = \frac{2-0}{5-5} = -1$
 از طرفی چون $C(5, 2)$ روی $y = f(x)$ قرار دارد $f(5) = 2$ است و حاصل در داره شاره صفره صفرام است. پس هوییتال می‌گیریم و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2}{x - 5} = f'(5)$$

یعنی باید شیب خط مماس بر تابع $y = f(x)$ در $x = 5$ را پیدا کنیم که برابر با -1 است.