

Title: 8ae0150c-1fc0-11f1-8b1f-ecb1d7916074

9. به ازای چه مقادیری از a تابع $y = \frac{a}{4x^2 - 5x + 3a}$ همواره تعریف شده است؟

$$a = \frac{25}{48} \quad (1^*) \quad a < \frac{25}{48} \quad (2^*) \quad a > \frac{25}{48} \quad (3^*) \quad 0 < a < \frac{25}{48} \quad (4)$$

9. گزینه‌ی (2) صحیح است.

باید مخرج کسر، فاقد ریشه باشد تا کسر دازه شده، همواره تعریف شده باشد. بنابراین:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-5)^2 - 4(3a) < 0 \Rightarrow 25 - 12a < 0 \Rightarrow 25 < 12a \Rightarrow a > \frac{25}{12}$$

۱. دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{11 - \sqrt{x - 5}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱۲۴ (۳)

۱۲۲ (۳)

۱۲۳ (۲)

۱ بی‌شمار

۱. گزینه‌ی (۳) صحیح است.

عبارت زیر را در کمال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \\ 11 - \sqrt{x - 5} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x - 5} \leq 11 \Rightarrow x - 5 \leq 121 \Rightarrow x \leq 126 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq x \leq 126$$

در نتیجه دامنه‌ی تابع شامل اعداد طبیعی ۵, ۶, ..., ۱۲۶ است که تعدادشان برابر $126 - 5 + 1 = 122$ است.

Title: 247f8bee-1fc0-11f1-a104-ecb1d7916074

۱. اگر دو زوج مرتب $(\sqrt{k-1}, b \cos(\pi)+1)$ و $(k - \sin \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{k-1}}{4})$ برابر باشند، کدام گزینه درست است؟

$$k+b=0 \quad (۱)$$

$$\sqrt{k}=b \quad (۲)$$

$$k-b=0 \quad (۳)$$

$$k=\sqrt{b} \quad (۴)$$

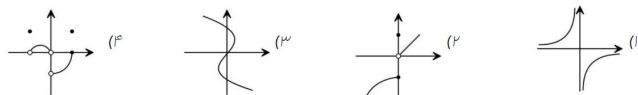
۱. گزینه ی (۲) صحیح است.

دو زوج مرتب $(\sqrt{k-1}, b \cos(\pi)+1)$ و $(k - \sin \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{k-1}}{4})$ نمایش یک نقطه هستند، پس این دو زوج مرتب با هم برابر بوده و در نتیجه مؤلفه های اول آن ها با هم و مؤلفه های دوم آن ها نیز با هم برابرند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{k-1} = k - \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{k-1} = k - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b \cos(\pi) + 1 = \frac{\sqrt{k-1}}{4} \Rightarrow b(-1) + 1 = \frac{\sqrt{k-1}}{4} \xrightarrow{k=\frac{1}{\sqrt{2}}} b = 1 \end{cases}$$

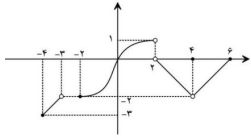
پس نتیجه به مقادیر درست آمده، $\sqrt{k}=b$ می باشد.

۲. کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟



۲. گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نمودارهای رسم شده در گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) مربوط به یک تابع نیستند، زیرا می‌توان خطی به موازات محور y ها رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. اما نمودار رسم شده در گزینه‌ی (۱) یک تابع را نشان می‌دهد، زیرا هر خطی به موازات محور y ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



۳. با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، اگر دامنه و برد این تابع به ترتیب برابر I_1 و I_2 باشد، آن‌گاه $I_2 - I_1$ کدام است؟
 (۱) $[-2, -1]$
 (۲) $[-2, 1]$
 (۳) $(-2, 1)$
 (۴) $[-2, -2]$

۳. گزینه‌ی (۴) صحیح است.

با تصویر کردن نمودار تابع f روی محور x ها و y ها به ترتیب دامنه و برد تابع درست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} D = I_1 = [-2, -2] \cup [-2, 2] \cup (2, 6] \\ R = I_2 = [-2, 1] \end{cases}$$

بنابراین $I_2 - I_1 = [-2, -2]$ می‌باشد.

Title: 595e064c-1fc0-11f1-acd4-ecb1d7916074

۴. چه تعداد از روابط زیر، نمایش شایسته‌ی یک تابع است؟

الف) $|x| = |y|$ (ب) $y = \pm\sqrt{-1+6x-9x^2}$ (پ) $y^2 + 3y^2 + 3y + x^2 - 1 = 0$ (ت) $y^2 - 4y + 4 = \sin x$

۱ (ا) ۲ (ب) ۳ (پ) ۴ (ت)

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است. همه‌ی موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) یا فرض $x = 1$ ، به $|y| = 1$ می‌رسیم و در نتیجه $y = \pm 1$ است. از آن‌جا که به ازای یک مقدار برای x دو مقدار برای y درست آمده، پس این رابطه تابع نیست.

ب) داریم $y = \pm\sqrt{-1+6x-9x^2} = \pm\sqrt{-(9x^2-6x+1)}$ از آن‌جا که عبارت زیر رادیکال یا فرقیه‌ی زوج، باید همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد و عبارت $-(9x^2-6x+1)$ همواره کوچکتر یا مساوی صفر می‌باشد، پس فقط به ازای $x = \frac{1}{3}$ ، این رادیکال تعریف شده خواهد بود که مقدار y برابر صفر می‌شود و در نتیجه این رابطه فقط شامل یک زوج مرتب یا مقدمات $(\frac{1}{3}, 0)$ می‌باشد، پس تابع است.

پ) در مورد رابطه‌ی $y^2 + 3y^2 + 3y + x^2 - 1 = 0$ داریم:

$$y^2 + 3y^2 + 3y + 1 - 1 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (y+1)^2 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow (y+1)^2 = 2 - x^2 \Rightarrow y+1 = \sqrt{2-x^2}$$

همانطور که می‌بینید به ازای هر x فقط یک مقدار برای y درست می‌آید، پس تابع است.

$$y = -1 + \sqrt{2-x^2}$$

ت) در مورد رابطه‌ی $y^2 - 4y + 4 = \sin x$ داریم:

$$(y-2)^2 = \sin x \Rightarrow |y-2| = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y-2 = \pm\sqrt{\sin x} \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{\sin x}$$

با فرض $x = \frac{\pi}{4}$ داریم:

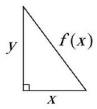
$$y = 2 \pm \sqrt{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

پس این رابطه تابع نیست.

Title: 7522a18a-1fc0-11f1-acd4-ecb1d7916074

۵. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به مساحت ۱۵ مترمربع، طول وتر به عنوان تابعی از یک ضلع قائمه (x) ، به کدام صورت است؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 225}}{x} \quad (۴) \quad f(x) = \frac{\sqrt{900 - x^2}}{x} \quad (۳) \quad f(x) = \frac{\sqrt{225 - x^2}}{x} \quad (۲) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 900}}{x} \quad (۱)$$



$$S = \frac{1}{2}xy = 15 \Rightarrow xy = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{x}$$

۵. گزینه‌ی (۱) صحیح است.
باتوجه به داده‌های مسئله و شکل مقابل، داریم:

حال از رابطه‌ی فیثاغورس، خواهیم داشت:

$$f^2(x) = x^2 + y^2 \Rightarrow f^2(x) = x^2 + \left(\frac{30}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{900}{x^2} = \frac{x^4 + 900}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 900}}{x}$$

۷. دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{\frac{r-|x|}{r+x^2}}$ کجاست؟

$$\{x : x \leq r\} \quad (۴)$$

\mathbb{R} (۳)

$$\{x : x \geq r\} \quad (۲)$$

$$\{x : -r \leq x \leq r\} \quad (۱)$$

۷. گزینه‌ی (۱) صحیح است

$$\frac{r-|x|}{r+x^2} \geq 0 \Rightarrow r-|x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq r \Rightarrow -r \leq x \leq r$$

عبارت زیر را در کمال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

۹. اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ باشد دامنه $f(-x)$ کدام است؟

$x \geq 1$ (۲)

$x \leq 1$ (۳)

$x \geq -1$ (۴)

$x \leq -1$ (۱)

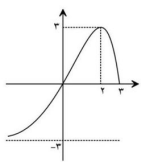
۹. گزینه ی صحیح است.

ابتدا $f(-x)$ را می سازیم سپس دامنه اش را پیدا می کنیم:

$$f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow -x + (x - 2) \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \quad * \\ x \leq 2 \Rightarrow -x + (-x + 2) \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

پس دامنه ی تابع $f(-x)$ برابر $x \leq 1$ است.



۱۰. یاتوجه به نمودار تابع f در شکل روبرو، دامنه‌ی تابع $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۶ (۲) ۱) بی‌شمار

۵ (۴) ۴ (۳)

۱۰. گزینه‌ی (۴) صحیح است.

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ 3-f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < 3 \Rightarrow x \leq 3, x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D = [-2, 3] - \{2\}$$

پس دامنه‌ی تابع اعداد صحیح $\{-2, -1, 0, 1, 3\}$ را شامل می‌شود.